**3. Замена переменной**

Метод основан на замене переменной и тождества |a|2=a2 [11].

**Пример 9**. Решить уравнение 2(x-3)2-5∙|x-3|+2=0.

2|x-3|2-5|x-3|+2=0

Сделав замену переменной t=|x-3| (t, получим квадратное уравнение

2t2-5t+2=0

t1=2, t2=0,5, откуда |x-3|=2 или |x-3|=0,5, и, значит, х1=5; х2=1; х3=2,5; х4=3,5.

Ответ: 1; 2,5; 3,5; 5.

**4. Использование геометрического смысла модуля**

при решении уравнения вида ***|x-a|+|x-b|=c*** (3)

Решить уравнения - значит найти все точки ***х*** числовой прямой, сумма расстояний от каждой из которых до точек *а* и *b* равна *с.*

Если расстояние между точками *a* и *b* больше *с* *(|a-b|>c*), то уравнение (3) не имеет решений. Действительно, если предположить, что искомая точка принадлежит отрезку с концами *a* и *b*, то сумма расстояний от такой точки до концов отрезка окажется больше *с* (поскольку длина этого отрезка больше *с*), а для любой точки, лежащей вне рассматриваемого отрезка, сумма расстояний будет еще больше.

Если расстояние между точками *a* и *b* равно *c* *(|a-b|=c*), то любая точка отрезка с концами *a* и *b* будет решением уравнения (3).

Если расстояние между точками *a* и *b* меньше *с* (|*a-b|<c*), то для любой точки отрезка с концами *a* и *b* сумма расстояний до точек *a* и *b* будет меньше *с*. Таким образом, искомая точка должна лежать вне отрезка с концами *a* и *b*. В этом случае сумма расстояний от искомой точки до точек *а* и *b* будет складываться из длины отрезка с концами *а* и *b* и удвоенного расстояния от этой точки до ближайшего к ней конца отрезка.

Данные рассуждения позволяют найти искомые значения переменной. Для этого нужно изобразить числовую ось, отметить на ней «ключевые» точки *a* и *b* и расстояние между ними *(|a-b*|) [11].

**Пример 10**. Решить уравнение |x-5|+|x+4|=12.

Запишем его как |x-5| + |x-(-4)|=12, где х+4=0 при x=-4, x-5=0 при x=5. Найдем все точки х на числовой оси, сумма расстояний от каждой из которых до точек 5 и -4 равна 12. На отрезке [-4;5] искомых точек быть не может, поскольку сумма расстояний от любой точки отрезка до его концов равна длине отрезка |5-(-4)|=9. Значит, искомые точки лежат вне отрезка [-4;5]. Рассмотри точку правее числа 5. Сумма расстояний от этой точки до концов отрезка складывается из длины отрезка и удвоенного расстояния от этой точки до точки 5. Удвоенное расстояние равно 12 -9=3, искомая точка находится правее точки 5 на 3:2=1,5 единиц. Первая искомая точка: х=6,5. Аналогично, находим вторую искомую точку левее точки -4 на 1,5 единиц: х=-5,5.



Ответ: -5,5; 6,5

**Пример 11**. Решить уравнение

|x-2| +|x-3|=1 (свойство 11)

Получаем уравнение вида (3).

Используем геометрический смысл модуля: найти точку *Х* такую, что сумма расстояний от *Х* до точки с координатой 2 и 3 равна 1. Любая точка внутри отрезка [2;3] удовлетворяет данному условию, так как расстояние между точками 2 и 3 равно 1.

Ответ: [2;3]

**§3. Методы решения неравенств, содержащих модуль**

При решении неравенств вида **|f1(x)|+|f2(x)| +….+|fn(x)| ⋁ g(x)** применяется метод промежутков (интервалов).

**Пример 12**. Решить неравенство |x+1|-|x-4|>7.

Корни подмодульных выражений равны -1 и 4.

По методу промежутков рассмотрим 3 случая:

1)

2)

3)

Ответ: нет решения.

Другой подход, напоминающий скорее не раскрытие, а «отбрасывание» модулей, применим к простейшим неравенствам вида |f(x)| ⋁ g(x) и |f(x)| ⋁ |g(x)| [12].

1. **|f(x)|<g(x)** -g(x)<f(x)<g(x)
2. **|f(x)|>g(x)**
3. **|f(x)| |g(x)|** f2(x) g2(x)
4. **(|f(x)|-|g(x)|)∙h(x)**  метод замены множителя |f(x)| - |g(x)| на множитель f2(x)-g2(x) того же знака.

Воспользуемся определением модуля для доказательства равносильности преобразований неравенства вида **|f(x)|<g(x)** .

|f(x)|<g(x)

-g(x)<f(x)<g(x)

Если g(x)<0,то х [2].

**Пример 13**. Решить неравенство |x2-2x-3|< 3x-3

* 3-3x < x2-2x-3 < 3x-3

Ответ: (2;5).

Аналогично, можно доказать равносильность преобразований неравенства вида **|f(x)|>g(x)** .

1) случай при g(x)≥0.

|f(x)|>g(x)

2) случай при g(x)<0 неравенство |f(x)|>g(x) верно для любого х.

Но объединением решений неравенств для отрицательных g(x) является также вся числовая ось. Поэтому и при g(x)<0 утверждение также выполняется [2].

**Пример 14**. Решить неравенство |x-1|> (x+1)

Ответ: (-∞;)∪(3;∞).

**Пример 15**. Решить неравенство |x3-1| 1-x .

|x3-1| 1-x

Ответ: (-.

**Пример 16**. Решить неравенство |x-6|>|x2-5x+9| ( 3вид неравенства).

Возведем в квадрат обе части неравенства и, используя тождество |a2|=a2, получим (x-6)2 > (x2-5x+9)2

(x-6)2 - (x2-5x+9)2 >0

(x- 6+x2 - 5x+9)(x- 6-x2+5x-9) > 0

(x2- 4x +3)(-x2+6x-15) > 0

(x-3)(x-1)(x2-6x+15) < 0

Ответ: (1;3)

**Пример 17**. Решить неравенство | .

Используем свойство | = получим:

так как x2+x+1 >0 , x, то данное неравенство равносильно неравенству |x2-3x-1|-|3x2+3x+3|<0

* (x2-3x-1)2- (3x2+3x+3)2<0 ( используем метод замены множителя |f|-|g| на f2 - g2 одного знака)

(x2-3x-1+3x2+3x+3)(x2-3x-1-3x2-3x-3) < 0

(4x2+2)(-2x2-6x-4)<0 (2x2+1)(x2+3x+2) > 0

(x2 +3x+2)>0

Ответ: (-∞; -2)∪(-1;∞)

**Пример 18**. Решить неравенство:

Данное неравенство похоже с предыдущим примером №17, но решим его как неравенство вида |f(x)| < *a*, где *а* константа.

x≥0.

Ответ:

**Пример 19**. Решить неравенство: |x+1|+|x+2| [2]

Обозначим a=x+1, b=x+2, a+b=2x+3. Тогда в новых переменных наше неравенство выглядит так: |a|+|b | ≤ a+b.

Решим его сначала возведением в квадрат обеих частей неравенства: |a|+|b|≤a+b

|x+1|+|x+2|

Ответ:[-1;∞].

**Пример 20**. Найти все целые отрицательные решения неравенства:

|+70| + |x2-2x-9| ≤ [2].

+70, ,

Докажем неравенство :

Используем доказанное неравенство при решении исходного неравенства, выполнив равносильный переход

| +70| + |x2-2x-9| ≤

( +70) ∙ (x2-2x-9)≥0.

Точки, в которых левая часть равна нулю: -; 1±.

Оценим их: -; 1- 1+.

Поэтому решение неравенства x [-; 1-, а целые отрицательные решения: -3;-4;-5.

Ответ: -3;-4;-5.