**Дидактический материал к элективному курсу**

**Линейное уравнение с одной переменной.**

Каждое из уравнений 5x=-4, -0,2x=0, -x=-6,5 имеет вид ax=b, где x – переменная, a и b – числа.

Такие уравнения называют линейными уравнениями с одной переменной.

*Определение*. **Уравнение вида ax=b, где x – переменная, a и b – некоторые числа, называется линейным уравнением с одной переменной.**

**1**. Из стального листа необходимо вырубить 25 круг­лых шайб с наружным диаметром, равным 50 **мм,** и внутренним диаметром — 22 мм. Какую площадь должен

иметь лист, если 35 °/0 площади этого листа идет в отход?

**Решение.**

Площадь одной шайбы

 $F=\frac{π}{4}\left(D^{2}-d^{2}\right)=\frac{3.14}{4}\left(5^{2}-2.2^{2}\right)≈15.8 см^{2}$.

Если площадь листа x, то отход составит 0,35x. Вычтя из всей площади листа x площадь отхода 0,35x, получим площадь 25 шайб, равную 15,8×25=395 $см^{2}$. Таким образом, составляем уравнение: x-0.35x=395. Решаем его и находим: 0,65x=395 и x=610 $см^{2}$.

**Проверь себя.**

**2**. Брус шириной Ь = 236 мм требуется распилить на доски, толщина которых Ьг = 20 мм. Ширина реза I = 4мм. Сколько досок получится из этого бруска?

**3.** Измерение больших диаметров может производить­ся посредством штангенциркуля. Размер и для данного штангенциркуля обычно известен или может быть легко измерен. Размер / получаем при измерении штанген­циркулем. Требуется определить диаметр детали D.

**4**. В сосуде сжимается газ за счет перемещения пор­шня площадью S Определить начальный объем газа в сосуде У0, если ход поршня /, степень сжатия газа /п, а зависимость между степенью сжатия и объемом газа выражается формулой:

m x = V0/ V k

где VK — конечный объем газа; а — показатель степени,

определяемый опытным путем.

(Степенью сжатия называется отношение давления сжатого газа pk к начальному давлению р0, т. е. т =PK/Po .)

**Системы уравнений первой степени.**

Определение. **Решением системы уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.**

Способы решения систем уравнений первой степени:

*- графический;*

*- аналитический:*

*а) способ подстановки;*

*б) способ сложения.*

**1**. Два автомобиля движутся со скоростью u1 и u2  причем u1 > u2 и первый автомобиль догоняет второй. На расстоянии Лх от второго автомобиля шофер первого автомобиля начинает обгон и заканчивает его, обо­гнав второй автомобиль на расстояние Л2. Длина первого автомобиля /-2, второго — ^. Определить х — длину участ­ка дороги, просматриваемого шофером первого автомоби­ля, если она должна быть вдвое больше /. пути обгона из условий обеспечения безопасности, так как обгон произво­дится на дороге со встречным движением, и скорость встречного автомобиля может быть не меньше скорости

обгоняющего.

**Решение.**

Пусть обгона равен

$L=\frac{x}{2}= A\_{1}+L\_{1}+V\_{II}×t+A\_{2}+L\_{2}$,

где t – время обгона и $L=\frac{x}{2}=V\_{1}∙t$.

решая эти уравнения совместно, получаем:

$t=\frac{A\_{1}+A\_{2}+L\_{1}+L\_{2}}{V\_{1}-V\_{II}}$;

$$x=2V\_{1}\frac{A\_{1}+A\_{2}+L\_{1}+L\_{2}}{V\_{1}-V\_{II}}$$

Например, если

$$ А\_{1}=20м, A\_{2}=30м, L\_{2}=4м, L\_{1}=6м, V\_{1}=60 \frac{км}{час}, V\_{II}=40\frac{км}{час}, то$$

$$x=2∙60 \frac{20+30+4+6}{60-40}=360м$$

Ответ: 360м.

**Проверь себя.**

**2.** Определить усилия в ножках проектируемого ме­таллического стола, на который должна укла­дываться литая деталь весом О = 300 кг. Расстояние меж­ду ножками стола / = 1 м и равнодействующая веса де­тали проходит через точку С на расстоянии г = 10 см от средних линий стола.

**3.** На строительстве гидроэлектростанции потребова­лось переместить подъемный кран весом в 25 Т с эста­кады на соседнюю с ней монтажную площадку. Для этого был сооружен помост, опирающийся на три параллельно уложенные балки на расстоянии / = 2 м друг от друга. Определить нагрузку на каждую балку от веса крана, ес­ли его центр тяжести находился на расстоянии 0,5 м от

средней балки.

**Неравенства.**

Определение. **Число a больше числаb, если разность a-b – положительное число; число a меньше числа b , если разность a-b – отрицательное число.**

**Свойства числовых неравенств.**

**Теорема 1.** *Если a>b, то b<a; если a<b, то b>a.*

**Теорема 2.** *Если a<b и b<c, то a<с.*

**Теорема 3.** *Если a<b и c – любое число, то a+с<b+c.*

*Если к обеим частям верного неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство.*

**Теорема 4.** *Если a<b и c – положительное число, то ac<bc. Если a<b и c – отрицательное число, то ac>bc.*

*Если обе части верного неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится верное неравенство.*

*Если обе части неравенства умножить или разделить на одго и то же отрицательное число и изменить знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство.*

**Сложение и умножение числовых неравенств.**

**Теорема 5.** *Если a<b,и c<d, то a+c<b+d.*

*Если сложить почленно верные неравенства одного знака, то получится верное неравенство.*

**Теорема 6.** *Если a<b, то b<a и c<d,где a,b,c и d – положительные числа, то ac<bd.*

*Если перемножить почленно верные неравенства одного знака, левые и правые части которых – положительные числа, то получится верное неравенство.*

***Решение неравенств с одной переменной.***

Определение**. Решением неравенств с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.**

Неравенства, имеющие одни и те же решения, **называются равносильными.**

**Свойства:**

1) Если из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком, то получится равносильное ему неравенство.

2) Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число, то получится равносильное ему неравенство;

если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится равносильное ему неравенство.

**1.** Определить, какую эксцентричную нагрузку Р можно приложить к прямому стержню, площадь сечения которого F, момент сопротивления сечения изгибу W, эксцентриситет приложения нагрузки, если допустимые напряжения в стержне [q], напряжения от изгиба qиз = Pe/W, напряжения от сжатия стержня qсж = P/F.

**Решение.**

Суммарное напряжение, действующее в стержне:$σ=σ\_{из}+σ\_{сж}$

По условиям прочности действующее напряжение должно быть меньше или равно допустимому, т.е.

$$\left[σ\right]\geq σ=σ\_{из}+σ\_{сж}$$

После подстановки вместо напряжений изгиба и сжатия их значений получаем:

$$\left[σ\right]\geq \frac{P}{F}+\frac{Pe}{W}$$

Откуда

$P\leq \frac{\left[σ\right]}{\frac{1}{F}+\frac{e}{W}}$,

Или

$P\leq \frac{\left[σ\right]F}{1+\frac{eF}{W}}$,

Последняя формула находит применение при расчете прямых стержней, нагруженных эксцентрично приложенной силой.

**Проверь себя.**

**2**. Тяжелое тело весом Р находится на плоскости, наклоненной под углом а к горизонту. Коэффи­циент трения между данным телом и плоскостью — f. При каких значениях угла, а данное тело будет: а) дви­гаться по плоскости вниз и б) находиться в равновесии?

**3**. Известно, что вертолет может поднимать­ся и опускаться вертикально, а также неподвижно висеть в воздухе. При этом сила тяги несущего винта вертолета Р = apn2S D4, где а — безразмерный коэффициент тяги, зависящий от шага винта; р — плотность воздуха; nS — число оборотов винта в секунду; D—диаметр винта. При каком значении секундных оборотов nS вертолет весом G будет: а) подниматься, б) неподвижно висеть в воздухе и в) опускаться?

Шаг винта полагаем постоянным, следовательно, и а = сonst.

**Квадратные уравнения.**

Определение. **Квадратным уравнением называется уравнение вида ax + bx + c=0, где х – переменная, a, b, c – некоторые числа, причем a≠0.**

**1**. В прямоугольном листе жести со сторонами а = = 600 мм и Ь = 400 мм требуется вырезать прямоуголь­ное отверстие площадью S = 1000 см2 так, края были на одинаковом расстоянии от краев листа. Определить с точностью до 1 мм это рас­стояние.

**Решение.**

Обозначим через x расстояние между краями листа и отверстия. Площадь отверстия S=(a-2x)(b-2x) или $4x^{2}-2\left(a+b\right)x+\left(ab-S\right)=0, $

Откуда $x\_{1.2}= \frac{(a+b)\pm \sqrt{\left(a+b\right)- 4(ab-S)}}{4}$

Величина, стоящая под корнем, больше нуля. В этом можно убедиться, если представить решение уравнения в виде:

$$x\_{1.2}= \frac{(a+b)\pm \sqrt{\left(a-b\right)^{2}+ 4S}}{4}$$

Условию задачи удовлетворяет только один корень

$$x\_{1}= \frac{\left(a+b\right)-\sqrt{\left(a-b\right)^{2}+ 4S}}{4}$$

так как

$$x\_{2}= \frac{\left(a+b\right)+\sqrt{\left(a+b\right)^{2}+ 4S}}{4}>\frac{a+b}{4}>\frac{b}{2}$$

где b – меньшая сторона листа. Геометрический смысл обоих корней ясен из рисунка, после подстановки числовых значений

$$x\_{1}= \frac{\left(60+40\right)-\sqrt{\left(60-40\right)^{2}+ 4∙100}}{4}≈8,4 см$$

Ответ: 8,4 см.

**Проверь себя.**

**2**, На цилиндрическом участке вала диаметром О, равным 52 мм, имеется паз шириной Ь, равной 16 мм. Глубина паза Н задана на чертеже. Ее измерение с точностью до 0,1 мм произвели по боковой поверхности паза. Допустим ли этот способ измерения?

**3**. Определить толщину стенки стальной трубы с наружным диаметром D = 140 **мм,** идущая на изготовле­ние вышек буровых установок, если известно, что по условиям прочности площадь ее поперечного сечения F= 25 см2.

**4**. Поперечное сечение понтона имеет форму равнобоч­ной трапеции. Вес понтона с грузом С = 3,8 Т длина 1 = 6 м ширина днища а = 1,5 м угол наклона

Сортов к вертикали а=8° и удельный вес воды у=1\*s/см3. Определить глубину погружения понтона в воду, если считать, что его сечение постоянно по всей длине.

**Прогрессии.**

Числа, образующие последовательность, называют *членами последовательности.*

***Арифметической прогрессией*** называется последовательность, каждый член которой, начиная со 2-го, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом.

***Геометрической прогрессий***  называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со 2-го, равен предыдущему члену, умноженному на одно и то же число.

**1**. Найти работу, необходимую для подъема тяжелой цепи до вертикального положения. Вес всей цепи – Q, длина цепи – L.

**Решение.**

Пусть n-количество звеньев цепи. Усилие при подъеме первого звена: $Р\_{1}=\frac{Q}{2n}$. Работа на подъем первого звена: $A\_{1}= \frac{1}{2}\frac{Q}{n}\frac{L}{n}=\frac{QL}{2n^{2}}.$ Второе звено: $P\_{2}=\frac{Q}{2n}+\frac{Q}{n};$ $A\_{2}=\frac{QL}{2n^{2}}+\frac{QL}{n^{2}}$

Третье звено: $P\_{3}=\frac{Q}{2n}+2\frac{Q}{n};$ $A\_{3}=\frac{QL}{2n^{2}}+2\frac{QL}{n^{2}}$,

n-е звено: $P\_{n}=\frac{Q}{2n}+(n-1)\frac{Q}{n};$ $A\_{n}=\frac{QL}{2n^{2}}+(n-1)\frac{QL}{n^{2}}$

Работа, затраченная на подъем всей цепи, представится в виде суммы n членов арифметической прогрессии:

$A=A\_{1}+A\_{2}+A\_{3}+ ………+ A\_{n}=\frac{A\_{1}+A\_{n}}{2} ∙n= \frac{QL}{n^{2}}∙\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n-1}{2}n=\frac{QL}{2}$*,*

**Проверь себя**

**2.** Известно, что период полураспада радиоактивного газа радона равен Т = 3,825 суток. Определить, какое ко­личество радона осталось в запаянной ампуле через t = 38,25 суток, если его первоначальное количество N0 = 0,5 кг.

**3**. Из бака, наполненного до уровня Н1 , через небольшое отверстие в днище вытекает мазут. Зависимость между секундными расходом q и напо­ром Н (высотой свободной поверхности жидкости над уровнем отверстия) может быть выражена линейной функ­цией q= АН, где А — коэффициент пропорциональности, зависящий от рода жидкости и диаметра отверстия.

Вывести формулу для общего расхода мазута через t секунд, если площадь свободной поверхности жидкости в баке равна F. Полагаем приближенно, что величина напора в течение каждой секунды остается неизменной.

**Логарифмы.**

Определение. **Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a, чтобы получить число b.**

$$a^{log\_{a}b}=b$$

**Основные свойства логарифмов.**

1. $log\_{a}1=0$
2. $log\_{a}a=1$
3. $log\_{a}xy=log\_{a}x+log\_{a}y$
4. $log\_{a}\frac{x}{y}=log\_{a}x-log\_{a}y$
5. $log\_{a}x^{p}$= p$ log\_{a}x$
6. $log\_{a}blog\_{b}a=1$

**1**. Определить экономическую скорость резания при обработке серого чугуна на токарном станке, если глубина резания t = 2 мм, а подача S = 0,4 мм/об —. Формула для определения экономической скорости в этом случае:

Uэк = 32,6/t0.16\*S0.38 м/мин.

**Решение.**

Логарифмируя формулу, получаем:

$$lgυ\_{эк}=lg32.6-0.16lgt-0.8lgS=lg32.6-0.16lg2-0.38lg0.4≈1.616$$

Откуда $υ\_{эк}≈41,3\frac{м}{мин}$

Ответ: $υ\_{эк}≈41,3\frac{м}{мин}$.

**Проверь себя**

**2**. Определить максимальную подачу, допускаемую токарным станком по следующей формуле:

S max = (2000M/CptnpD)1/Ур мм/об,

где М = 30 к Гм — крутящий момент станка; t= 5 мм —глубина резания, D = 50 мм—диаметр обрабатываемой детали;

Cp =157, X p = 1, Y p = 0,78коэффициенты, характеризующие обрабатываемый металл, в данном случае сталь 20.

**3**. Тяга и мощность воздушного винта самолёта определяются по формулам: P = apn2SD4 к Г;

N = βpn3SD5 к Гм/сек,

Где а – коэффициент тяги; β – коэффициент мощности; ns – секундные обороты винта, об/сек; D – диаметр винта, м; p – плотность воздуха, к Г сек2/м4. Вычислить тягу и мощность винта, если

α = 0,18; ns = 25 об/сек; β = 0,28; D = 2.1 м; p = 0.125 к Г сек2/м4 (у поверхности Земли).

**Бином Ньютона.**

Для любого натурального числа n справедлива формула

**(a+b)n = С0n an + C1n an-1b+…+Cmnan-m bm +…+ Cnn bn , которая называется формулой бинома Ньютона.**

Правая часть формулы называется **разложением бинома.** Коэффициенты C0n, C1n, …, Cmn, …, Cnn. называются биноминальными коэффициентами.

**Основные следствия из формулы Ньютона.**

1. Число всех членов разложения на единицу больше показателя степени бинома.

 2. Сумма показателей степеней при a и b в любом слагаемом разложения равна

 n - показателю степени бинома.

 3. Биноминальные коэффициенты, равноудалены от концов разложения, равны между собой, так как Сmn = Cn-m\*n.

4. Общий член разложения имеет вид:

 Tk+1 = Ckn an-k bk.

5. Сумма всех биноминальных коэффициентов равна 2n.

**1**. Пользуясь формулами задачи 62, определить, во сколько раз изменится потеря напора в трубе при увели­чении ее диаметра на 5 мм, считая все остальные величи­ны в формуле неизменными.

**Решение.**

Формулу потери напора в трубе запишем в виде $h=\frac{k}{d^{5}}$ . Если первоначальный диаметр трубы *d* мм., то новый диаметр $d\_{1}=d+5 мм$. Тогда находим соответствующие этим трубам потери напора:

$h=\frac{k}{d^{5}}$ и $h\_{1}=\frac{k}{\left(d+5\right)^{5}} $

Отношение потерь напора:

$$\frac{h}{h\_{1}}=\frac{\left(d+5\right)^{2}}{d^{5}}=\left(1+\frac{5}{d}\right)^{5}$$

Полученное выражение раскроем по формуле биома Ньютона:

$$\frac{h}{h\_{1}}=1^{5}+5∙1^{4}\frac{5}{d}+10∙1^{3}∙\frac{5^{2}}{d^{2}}+10∙1^{2}\frac{5^{3}}{d^{4}}+\frac{5^{5}}{d^{5}}=1+\frac{25}{d}+\frac{250}{d^{2}}+\frac{1250}{d^{3}}+\frac{3125}{d^{4}}+\frac{3125}{d^{5}}$$

Полученная формула показывает, во сколько раз уменьшится потеря напора $h\_{1}$ по сравнению с . Здесь диаметр *d* следует брать в мм.

**Проверь себя**

**2**. Газ сжимается в сосуде, стенки которого хорошо проводят тепло. При этом абсолютная температура и дав­ление газа связаны следующим уравнением:

P1/P2 = (T2/T1)n/n-1, где п = 1,2—показатель политропы; р1 и р2— соответст­венно давления первого и второго состояния; Т1 и Т2 — соответственно абсолютные температуры первого и вто­рого состояния.

Температура в сосуде измеряется посредством помещен­ной в нем термопары. Пусть во втором состоянии при сжа­тии температура получила небольшое приращение t = 5° против первого состояния. Определить, какое приращение получило при этом давление. Температура T1 = 300° и давление р1 = 2кГ/см2 — первого состояния известны.

**3**. Известно, что T1 — долговечность вала, вращаю­щегося с постоянной угловой скоростью, при приложении к нему поперечной нагрузки, равной Q1. Определить, на сколько уменьшится долговечность ва­ла, если нагрузка увеличится на Q? Зависимость между нагрузкой и долговечностью устанавливается формулой:

T1/T2 = (Q2/Q1)9,

где, Q2 и T2 – нагрузка, отличающаяся от Q1 и соответствующая ей долговечность.

**Производная, исследование функций на максимум и минимум.**

Определение. Производной функции f в точке x0 называется число, к которому стремится разностное отношение

$$\frac{∆f}{∆x}=\frac{f\left(x\_{0}+∆x\right)-f\left(x\_{0}\right)}{∆x}$$

при $∆x$, стремящемся к нулю.

Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, **называются критическими точками** этой функции. Эти точки играют важную роль при построении графика функции, поскольку только они могут быть точками экстремума функции.

**Необходимое условие экстремума (Теорема Ферма).**

Если точка x0 является точкой экстремума функции f и в этой точке существует производная f ‘ , то она равна нулю: **f ‘(x0) = 0.**

**Признак максимума функции.**

Если функция *f* непрерывна в точке $x\_{0}$, а f’ (*x)*>0, на интервале (a: $x\_{0}$) и f’ (*x)<*0 на интервале ($x\_{0}$:*b*), то точка $x\_{0}$ является точкой максимума функции *f.*

**Признак минимума функции.**

Если функция *f* непрерывна в точке $x\_{0}$, а f’ (*x)<*0, на интервале (a: $x\_{0}$) и f’ (*x)>*0 на интервале ($x\_{0}$:*b*), то точка $x\_{0}$ является точкой минимума функции *f.*

**1**. Прочность бруса прямоугольного сечения при ра­боте его па изгиб прямо пропорциональна ширине и кубу высоты. Найти ширину бруса наибольшей прочности, ко­торый можно вырезать из бревна диаметром D = 30 см.

**Решение.**

Из рисунка видно, что половина высоты вырезаемого бруса является катетом треугольника ОАВ и поэтому $\left(\frac{x}{2}\right)^{2}+ \left(\frac{у}{2}\right)^{2}=R^{2}$.

Отсюда $у=2\sqrt{R^{2}-\frac{x^{2}}{4}}=2\left(R^{2}-\frac{x^{2}}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$,

Если обозначить прочность бруса при изгибе через *W*, то из условия задачи можно записать, что $W=kxy^{3}$, или после соответствующей замены: $W=8kx\left(R^{2}-\frac{x^{2}}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Дифференцируем последнее выражение по *x* и приравниваем к нулю:

$\frac{dW}{dx}=8k\left(R^{2}-\frac{x^{2}}{4}\right)^{\frac{3}{2}}-6kx^{2}\left(R^{2}-\frac{x^{2}}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=0,$ или

$8 k\left(R^{2}-\frac{x^{2}}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\left(R^{2}-x^{2}\right)=0$.

Равенство нулю первой скобки нам дает: *x=2R=D=30 см.* Этот ответ не имеет смысла, так как брус такой ширины не будет иметь высоты. Тогда приравниваем нулю вторую скобку $R^{2}-x^{2}=0$ и получаем ответ: *x=R= 15см.* В обоих случаях мы брали лишь положительные значения *x*.

**Проверь себя**

**2**. Объем открытого цилиндрического резервуара для хранения жидкости равен V = 10м3. Определить диаметр Dm и высоту Нп, при которых его вес будет наи­меньшим, если, толщина стальных листов, идущих на из­готовление цилиндрической части и плоского днища, по конструктивным соображениям, принята одинаковой.

**3**. Из прямоугольного листа жести шириной Ь = 4 дм требуется изготовить желоб прямоугольного сече­ния. Определить наибольшую площадь попереч­ного сечения желоба.