Приложение 2.

**Примеры исследования функции**

Пример 24. Исследуйте функцию *f (x)*=.

Решение:

*f (x)*==.

1. *D(f)*={x={x;

2. Вертикальная асимптота *х*=2. Проверка: если *х*=2, то (*х*+3)(*х*-1)0.

3. Точки пересечения с осями координат: *а*) *f (0)*==1,5; точка (0; 1,5);

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *б) f (х)=0*, тогда | | (*х+3*)(*х-1*)=0,  *х*=-3 или *х*=1, точки (-3; 0) и (1; 0) | |
| 4. Промежутки знакопостоянства: | | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\Копия 2.jpg*Рис. 10* | |

5. Исследуем функцию на четность или нечетность:

*а)* *D(f)* - это симметрическое множество;

*б) f (-x)* ==,

так как *f (-х) f (х)* и *f (-х)- f (х)*, то функция *f* не является ни четной, ни нечетной.

|  |  |
| --- | --- |
| 6. Степень числителя на единицу больше степени знаменателя, значит, существует | |
| наклонная асимптота. Выделим целую часть | |
| *\_х2+* 2*х -* 3 | *х* - 2  *х2* - 2*х*  *х* + 4  \_4*х* -3  4*х* – 8  5 | *f (x)=*= *х*+4 +;  (*x*0) *f (x) x+*(*f* (*x*) *-* (*x+*4))0,  значит, по определению *у* = *х* + 4 – наклонная асимптота. |

Так как *f (x)* = *х*+4 +, где 0, значит, график не пересекает наклонную асимптоту.

|  |  |
| --- | --- |
| 7. Области существования графика: | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpg*Рис. 11* |

8. *E(f)*: y= *f (x)*=. Пусть *у* – параметр, выясним возможность корней у

|  |  |
| --- | --- |
| параметрического уравнения | *yх-*2*у=x2+2x-3*  *х²+*(2-*у*)*х+*(2*у-3*)*=*0*, у*0*,*  *D=*(2-*у*)*2-4*(2*у-3*)*=4-4y+y2-8y+12=y2-12y+160*  *y2-12y+16=0, D=36-16=20*  *y=6=6* |
| *C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpgРис. 12* |

*E(f)*=.

9. Так как *E(f)*= *у1* = 6-2 и *у2* = 6+2 являются значениями минимума и максимума функции. Найдем абсциссы точек

для функции *g(x)*= *х²+*(2-*у*)*х+*(2*у-3*) *x*0 = - = =,

если *у1* = 6-2, то *x1* = = = 2 - ,

если *у2* = 6+2, то *x2* = = = 2 + .

Учитывая множество значений функции, определяем, какая из точек является точкой минимума, а какая – точкой максимума: *xmin*=2 + , *xmax*=2 - ,

*f(x) = f* (2 + ) *=* 6+2;  *f(x) = f* (2 - ) *=* 6-2.

|  |  |
| --- | --- |
| 10. Из эскиза графика следует, что функция *f(x)*  возрастает в промежутках  (- и [2 + ;  убывает в промежутках  [ и (2. | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpg*Рис. 13* |

Пример 25. Исследуйте функцию *f (x)*=.

Решение:

*f (x)*===.

1. *D(f)*={x{x=

={x.

|  |  |
| --- | --- |
| 2. Вертикальные асимптоты | *x*=-5. Проверка: если *х*=-5, то (*х*-3)(*х*+3)0;  *x*=0. Проверка: если *х*=0, то (*х*-3)(*х*+3)0;  *x*=5. Проверка: если *х*=5, то (*х*-3)(*х*+3)0. |

3. Точки пересечения с осями координат: ось *OY* не пересекает, так как ;

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| *f (х)=0*, тогда | | (*х-*3)(*х+*3)=0,  *х*=3 или *х*=-3, точки (-3; 0) и (3; 0). |
| 4. Промежутки знакопостоянства: | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpg*Рис. 14* | |

5. Исследуем функцию на четность или нечетность:

*а)* *D(f)* - это симметрическое множество;

*б) f (-x)* ==,

так как *f (-х) f (х)* и *f (-х)- f (х)*, то функция *f* не является ни четной, ни нечетной.

|  |  |
| --- | --- |
| 6. Степень числителя меньше степени знаменателя, значит, горизонтальной асимптотой является ось абсцисс, *у=*0 – горизонтальная асимптота. | |
| 7. Области существования графика: | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2 001.jpg*Рис. 15* | |

8. Степень дробно - рациональных функции выше второй, поэтому рассмотренный способ нахождения *E(f)* в предыдущем примере, не подходит, так как получается кубическое уравнение *ax3+bx2+cx+d*=0.

|  |  |
| --- | --- |
| 9. Из эскиза графика следует, что функция *f(x)* кусочно-монотонная – на каждом из интервалов непрерывно убывает, но убывающей не является, так как условие для любых *х1,х2 Х,* гдемножество *ХD(f)*, таких, что *х1<х2*, неравенство *f(x1)>f(x2)* не выполняется. | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpg*Рис. 16* |

Пример 26. Исследуйте функцию *f (x)*=.

Решение:

I. Пусть *=q.* Исследуем функцию *q(x)=.*

1. *D*(*q*): *x²-x*+10, D=1-4<0, *a>*0 *x²-x*+1>0 при любых *х*  *D*(*q*)=(-.

2. *x²-x*+10 вертикальной асимптоты нет.

3. Степени числителя и знаменателя совпадают, значит, горизонтальной асимптотой является прямая, *q*=1(отношение коэффициентов при высших степенях числителя и знаменателя).

4. Определим абсциссу точки пересечения графика функции *q(x)* и прямой *q*=1.

=1, *x²+x*+1= *x²-x*+1, 2*x*=0, *x*=0.

|  |  |
| --- | --- |
| 5. Область существования графика: | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2 001.jpg*Рис. 17* |

6. *E*(*q*): *y* = *q* (*x*)=. Пусть *у* – параметр, выясним возможность корней у

|  |  |
| --- | --- |
| параметрического уравнения | *yх²-yx+у=x2+x+*1  (*y*-1)*x²*-(*y*+1)*x*+(*y*-1)=0*, у*0*,*  *D=*(*y*+1)*2-*4(*у-*1)²*=*(*y+*1-2*y+*2)(*y+*1+2*y*-2)=(3*-y*)(3*y-*1)0 |
| *C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpgРис. 18* |

*E*(*q*)=.

7. Так как *E*(*q*)= *у1* = и *у2* = 3 являются значениями минимума и максимума функции. Найдем абсциссы точек для функции *g(x)*=(*y*-1)*x²*-(*y*+1)*x*+(*y*-1), *x*0 = - =

если *у1* = , то *x1* = -1, если *у2* = 3, то *x2* = 1. Учитывая множество значений функции, определяем, какая из точек является точкой минимума, а какая – точкой максимума: *xmin*=-1, *xmax*=1,  *q*(*x*)*=q*(-1)*=* ,  *q*(*x*)*=q*(1)*=*3.

II. Переходим к функции *f (x)*=*.*

Так как *y*= - возрастающая, то  *f(x)*= повторяет кусочную монотонность *q(x)=.* () () ();  *f(x) = f* (-1) *=*;  *f(x) = f* (1) *=*.

Пример 27. Исследуйте функцию *f (x)*=

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. *D(f)*={x  *x² + x* – 6 = 0, *x1·x2*=-6, *x1·x2*=-1, *x1*=-3, *x2*=2.  *D(f)*=(-3; 2). | | | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2 002.jpg*Рис. 19* | |
| 2. Нули функции: | | *б) f (х)=0*, тогда | =0,  6 *– x - x² =*1,  *x² + x* – 5 = 0,  *D*=1+20=21, *x1*= , *x2*= . | |

3. (6 – *x - x²*) = - (*x² + x* – 6) = - (*x² + x* + ) + 6 = 6- (*x* +)² 6.

*g(t)*=*t* является возрастающей на *D(f)* на *D(f)*, причем при *х* = -  *f (x)= f*(- ) *=*

|  |  |
| --- | --- |
| 4. Область существования графика отмечена штриховкой.  5. Из эскиза графика следует, что функция *f(x)* возрастает в промежутке (-;  убывает в промежутке [.  6. *E(f)*=(-. | C:\Documents and Settings\1\Рабочий стол\Школа\2.jpg*Рис. 20* |

Пример 28. Исследуйте функцию *f (x)*=*sin x* + 4– 5.

*f (x)* = *sin x* + 4– 5 = *x* -1+4-4 = - (1 – *sin x*) + 4 - 4 =

= - ()² + 4 – 4 = - (()² - 4 + 4) = - ( - 2)².

1. *D(f)* = *R*.

2. *D(f)* – симметрическое множество.

*f(-x)* = *sin(-x)* + 4– 5 = - *sin x* + 4– 5.

*f(-x)f(x)*, *f(-x)f(x)*, значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. *f (x+2)*=*sin x* + 4– 5= *sin x* + 4– 5 = *f (x). T=2*

4. *f (x)* 0, так как 01.

5. Найдем наименьшее и наибольшее значение функции: -1 1,

при *sin x* = 1, *x* = , , *f (x) =* - ( - 2)² = - 4,

при *sin x* = -1, *x* = - , , *f (x) =* - ( - 2)² = - ( - 2)² = -6 + 4 .

*f* (- ) = - 6 + 4, *f* () = - 4.

6. *E(f)* = .

7. Функция *f(x)* возрастает в промежутке ;убывает в промежутке .

Пример 32. Исследуйте функцию *f (x)*= + .

1. *D(f)* = (0; +)*.*

2. Найдем наименьшее и наибольшее значение функции. Введем векторы = и =. Тогда ; , , =. Согласно неравенству , имеем *f.*

Знак равенства достигается тогда и только тогда, когда, то есть когда = = 3 *=* 0,75 *x =.*  *f (x)* = *f*=.

3*. E(f)* = .

Пример 29. Исследуйте функцию *f(x)*=.

1. *D(f) = R*.

2. *D(f)* – симметрическое множество.

*f(-x)*= = .

*f(-x)f(x)*, *f(-x)f(x)*, значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

3. Найдем наименьшее и наибольшее значение функции. Для любых двух действительных чисел *a* и *b* справедливо неравенство +, где +, при

Имеем *f* == .

Итак, *f(x)*9, причем знак равенства достигается при одновременном выполнении равенств и , то есть при *x*=0, *f (x)*= *f*() = 9.

4*. E(f)* = .

Пример 30. Исследуйте функцию *f(x)*= + .

1. *D(f) = R* – симметрическое множество.

2. *f(x)>*0.

3. *D(f)* – симметрическое множество. *f(-x)*= + = + . *f(-x)f(x)*, значит, функция четная. Следовательно, график симметричен относительно оси *ОХ*.

4. Выясним вид монотонности на интервалах: *x f(*0*)*=*f(*1*)*= + функция *f(x)* возрастает;функция четная, значит, *x f(*0*)*=*f(-*1*)*= + функция *f(x)* убывает.

5. Из пп. 4 следует, *f (x)*= *f*() = 2.

6. Проверим асимптоту: *f(x)*= + + .

(*x*(*f(x)*, то есть (*x* ((*f(x)y=*2*х -* наклонная асимптота на . Так как функция четная, то наклонной асимптотой на является *y=-*2*х.*

Определим, пересекает ли график функции *f(x)* наклонные асимптоты, то есть решим уравнение: + = 2*x* на .

Домножим на сопряженное выражение:

+ )( - ) = 2*x*( - ),

*x² + x* + 1 - *x² + x* – 1 = 2*x*( - ),

2*x* = 2*x*( - ), разделим на ( - ),

, *x* = 0 – посторонний корень;

= 1+ ,

= только при *х* = 0,

возведем в квадрат = 1+

*x² + x* + 1 = 1 + 2 + *x²* - *x* + 1,

2*x* - 1 = 2, возведем в квадрат,

4*x*² - 4*x* + 1 = 4*x*² - 4*x* + 4,

1 - нет корней.

7*. E(f)* = .